Τετάρτη 27/03/2019

ΤΑΞΗ ΣΤΟΙΧΕΙΟΥ $a \in G$.

$o(a) = |\langle a \rangle|$

$o(a) = \infty$ δεν είναι πεπερασμένη

$o(a) = s < \infty$ είναι πεπερασμένη

s είναι ο μικρότερος φυσικός αριθμός τέτοιος ώστε $a^s = 1$

Αν $a^n = 1 \Rightarrow o(a) \mid n$

~~5ος~~ **ΘΕΩΡΗΜΑ**: Κάθε υποομάδα κυκλικής ομάδας είναι κυκλική

$\{a^n \mid n \in \mathbb{Z}\}$

Έστω G είναι κυκλική $\Rightarrow G = \langle a \rangle$ για κάποιο $a \in G$.

Έστω H υποομάδα της G

1) $|H| = 1 \Rightarrow H = \{1\} = \langle 1 \rangle$ Άρα H κυκλική.

2) $|H| > 1 \Rightarrow a^n \in H$ για κάποιο $n \neq 0$. $\Rightarrow a^{-n} \in H$ Άρα υπάρχουν φυσικοί τ.ω $a^m \in H$ (π.χ. $m = |n|$).

Έστω s ο ελάχιστος φυσικός αριθμός τ.ω $a^s \in H$

Θα δείξω ότι $H = \langle a^s \rangle$.

→ $a^s \in H \Rightarrow a^{-s} \in H \Rightarrow (a^s)^n \in H \Rightarrow \langle a^s \rangle \subseteq H$.

→ Έστω $h \in H \Rightarrow h \in H \leq G = \langle a \rangle \Rightarrow h = a^k$ $\quad k = q \cdot s + r$ με $0 \leq r < s$.

(i) $0 < r < s$

$$\left.\begin{array}{l} a^k \in H \Rightarrow a^{qs+r} \in H \\ a^s \in H \end{array}\right\} \Rightarrow (a^s)^q \cdot a^r \in H \qquad a^r = \underbrace{(a^s)^{-q}}_{\in H} \underbrace{(a^s)^q a^r}_{\in H} \in H$$

$$a^s \in H \Rightarrow (a^s)^{-q} \in H$$

$\left.\begin{array}{l} a^r \in H \\ r \text{ φυσικός} \\ r < s \end{array}\right\}$ Άτοπο.

Συνεπώς $r = 0 \Rightarrow k = q \cdot s \Rightarrow h = a^k = a^{q \cdot s} = (a^s)^q \in \langle a^s \rangle$

Άρα $H \subseteq \langle a^s \rangle$ και $H = \langle a^s \rangle$, δηλαδή H κυκλική.

ΘΕΩΡΗΜΑ: Έστω G ομάδα και $a \in G$ με $o(a) = s < \infty$. Ισχύει ότι $ord(a^n) = \frac{o(a)}{\mu.\kappa.\delta(n, o(a))}$

$o(a) = s$
$o(a^n) = \lambda$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

$o(a^n) = \lambda \Rightarrow (a^n)^\lambda = 1 \Rightarrow a^{n\lambda} = 1 \Rightarrow s = o(a) / n\lambda \Rightarrow \left.\begin{array}{r} \frac{s}{\mu.\kappa.\delta(n,s)} \Big/ \frac{n}{\mu.\kappa.\delta(n,s)} \lambda \\ \mu.\kappa.\delta\left(\frac{s}{\mu.\kappa.\delta(n,s)}, \frac{n}{\mu.\kappa.\delta(n,s)}\right) = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{s}{\mu.\kappa.\delta(n,s)} / \lambda$

$(a^n)^{s/\mu.\kappa.\delta(n,s)} = a^{n \cdot s/\mu.\kappa.\delta(n,s)} = a^{sn/\mu.\kappa.\delta(n,s)} = (a^s)^{n/\mu.\kappa.\delta(n,s)} = 1^{n/\mu.\kappa.\delta(n,s)} = 1$

$\Rightarrow \lambda = o(a^n) \,/\, \frac{s}{\mu.\kappa.\delta(n,s)} \Rightarrow \lambda \,/\, \frac{s}{\mu.\kappa.\delta(n,s)}$

Άρα $\lambda = \frac{s}{\mu.\kappa.\delta(n,s)}$

ΠΡΟΤΑΣΗ: Έστω G κυκλική ομάδα πεπερασμένης τάξης n και a ένας γεννήτορας της G, τότε όλοι οι γεννήτορες της G είναι της μορφής a^r όπου $\mu.\kappa.\delta(r, n) = 1$ με $0 \leq r < n$

$G = \langle a \rangle \quad o(a) = |\langle a \rangle| = |G| = n$

Έστω $\left.\begin{array}{l} 0 \leq r < n \\ \mu.\kappa.\delta(r,n) = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow o(a^r) = \frac{o(a)}{\mu.\kappa.\delta(r, o(a))} = \frac{n}{\mu.\kappa.\delta(r,n)} = \frac{n}{1} = n$

Άρα $o(a^r) = n \Rightarrow a^r$ γεννήτορας της G

$\underset{n\ \text{στοιχεία}}{\langle a^r \rangle} \subset \underset{n\ \text{στοιχεία}}{G} \Rightarrow G = \langle a^r \rangle$

→ Έστω $b \in G$ γεννήτορας της $G \Rightarrow G = \langle b \rangle$ $o(b) = n$

$b \in G = \langle a \rangle \Rightarrow b = a^m = a^{q \cdot n + r} = a^{q \cdot n} a^r = (a^n)^q a^r = 1^q a^r = a^r$

$m = q \cdot n + r$
$0 \le r < n$

→ $n = o(b) = o(a^r) = \dfrac{o(a)}{\mu.\kappa.\delta(r, o(a))} = \dfrac{n}{\mu.\kappa.\delta(r,n)} \Leftrightarrow n = \dfrac{n}{\mu.\kappa.\delta(r,n)} \Rightarrow \mu.\kappa.\delta(r,n) = 1$

ΑΣΚΗΣΗ: Δείξτε ότι η ομάδα $U(\mathbb{Z}_9)$ είναι κυκλική και βρείτε όλους τους γεννήτορές της.

κυκλική

$U(\mathbb{Z}_9) = \{[1]_9, [2]_9, [4]_9, [5]_9, [7]_9, [8]_9\}$

$o([1]_9) = 1$

$[2]_9 = [2]_9$
$[2]_9^2 = [4]_9$
$[2]_9^3 = [8]_9$
$[2]_9^4 = [7]_9$
$[2]_9^5 = [5]_9$
$[2]_9^6 = [1]_9$

Άρα $o([2]_9) = 6$ και $U(\mathbb{Z}_9) = \langle [2]_9 \rangle$

ΟΛΟΙ ΟΙ ΓΕΝΝΗΤΟΡΕΣ: $[2]^r$ $\left.\begin{array}{l} \mu.\kappa.\delta(r,6) = 1 \\ 0 \le r < 6 \end{array}\right\}$ $\begin{array}{l} r = 1 \\ r = 5 \end{array}$

Άρα οι γεννήτορες είναι $[2]_9^1$ και $[2]_9^5 = [5]_9$ $\boxed{\varphi(6) = 2}$

ΑΣΚΗΣΗ: Βρείτε όλους τους γεννήτορες της κυκλικής ομάδας $\mathbb{Z}_{12}$

$\mathbb{Z}_{12} = \langle [1]_{12} \rangle$

$[1]_{12} = [1]_{12}$
$2[1]_{12} = [2]_{12}$
$3[1]_{12} = [3]_{12}$
$\vdots$
$11[1]_{12} = [11]_{12}$
$12[1]_{12} = [12]_{12}$ $\quad o([1]_{12}) = 12$

$r[1]$ $\quad \left.\begin{array}{l} 0 \le r < 12 \\ \mu.\kappa.\delta(r,12) = 1 \end{array}\right\}$
$r=1 \Rightarrow 1[1]_{12} = [1]_{12}$
$r=5 \Rightarrow 5[1]_{12} = [5]_{12}$
$r=7 \Rightarrow 7[1]_{12} = [7]_{12}$
$r=11 \Rightarrow 11[1]_{12} \Rightarrow [11]_{12}$

Περίμενα $\varphi(12)$ γεννήτορες $\varphi(12) = 4$.

ΘΕΩΡΗΜΑ: Έστω $G = \langle a \rangle$ κυκλική ομάδα τάξης n και H υποομάδα της τάξης d τότε $d|n$ και $H = \langle a^{n/d} \rangle$.

Αν $d|n$ υπάρχει μοναδική υποομάδα της G τάξης d.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Έστω $H = \langle a^{n/d} \rangle$ τότε $|H| = o(a^{n/d}) = \frac{o(a)}{\mu.\kappa.\delta(n/d, o(a))} = \frac{n}{\mu.\kappa.\delta(n/d, n)}$
$d|n$
$o(a) = n$

$= \frac{n}{\frac{n}{d}} = d$ $\quad$ Άρα πράγματι $|H| = d$

$G = \langle a \rangle$ $\quad |G| = n$ $\quad H$ υποομάδα της G τάξης d.
$|H| = d$ $\quad H$ υποομάδα της $G = \langle a \rangle \Rightarrow H$ κυκλική $\Rightarrow H = \langle b \rangle$.
$b \in H \subseteq G = \langle a \rangle \Rightarrow b = a^s$ για κάποιο s
$d = |H| = o(b) = o(a^s) = \frac{o(a)}{\mu.\kappa.\delta(s, o(a))} = \frac{n}{\mu.\kappa.\delta(s,n)} \Rightarrow n = d\,\mu.\kappa.\delta(s,n)$.
$\Rightarrow d|n$

Αλγεβρικές Δομές Ι (2018-2019)
Φροντιστηριακές ασκήσεις #3

1. Έστω n, m δύο θετικοί ακέραιοι, και

$$H_1 = n\mathbb{Z} = < n >, \qquad H_2 = m\mathbb{Z} = < m >$$

οι κυκλικές υποομάδες της ομάδας $(\mathbb{Z}, +)$ οι οποίες παράγονται από τους φυσικούς αριθμούς n, m αντίστοιχα. Να προσδιορισθεί η ομάδα $H_1 \cap H_2$.

2. Έστω G πεπερασμένη κυκλική ομάδα με ταξη $|G| \geq 3$. Δείξτε ότι το πλήθος των γεννητόρων της G είναι άρτιο.

3. Έστω ότι $(G, *)$ είναι μια ομάδα και $a, b, x \in G$. Δείξτε ότι

$$\mathrm{ord}(x^{-1} * a * x) = \mathrm{ord}(a) = \mathrm{ord}(x * a * x^{-1}), \qquad \mathrm{ord}(a * b) = \mathrm{ord}(b * a).$$

Επίσης δείξτε ότι $\mathrm{ord}(a^{-1}) = \mathrm{ord}(a)$.

4. Έστω ότι $(G, *)$ είναι μια ομάδα, H μια υποομάδα της G και $x \in G$. Θέτουμε

$$xHx^{-1} = \{xhx^{-1} : h \in H\}.$$

Δείξτε ότι η xHx^{-1} είναι υποομάδα της G και ότι $\#\,(xHx^{-1}) = \#H$.

5. Να ευρεθεί η τάξη του στοιχείου a της ομάδος $(G, *)$, όπου

$a = [2]_3,\ (G, *) = (\mathbb{Z}_3, +)$, $\qquad a = [6]_{10},\ (G, *) = (\mathbb{Z}_{10}, +)$,
$a = i,\ (G, *) = (\mathbb{C}^*, \cdot)$, $\qquad a = -i,\ (G, *) = (\mathbb{C}^*, \cdot)$,
$a = -1 + i\sqrt{3},\ (G, *) = (\mathbb{C}^*, \cdot)$, $\qquad a = (-1 + i\sqrt{3})/2,\ (G, *) = (\mathbb{C}^*, \cdot)$.

6. Να ευρεθεί η τάξη όλων των στοιχείων της ομάδος $G = (U(\mathbb{Z}_{14}), \cdot)$ των αντιστρεψίμων ακεραίων modulo 14. Είναι η ομάδα G κυκλική;

7. Βρείτε το πλήθος των γεννητόρων μιας κυκλικής ομάδας με τάξη n, όταν $n = 5$, $n = 8$, $n = 12$, $n = 60$.

8. Βρείτε όλους τους γεννήτορες της ομάδος $\mathrm{U_m}$ των m-στων ριζών της μονάδας στο $\mathbb{C}$ όταν $m = 4$, $m = 17$, $m = 24$, $m = 31$.

9. Βρείτε όλους τους γεννήτορες των ομάδων $(\mathbb{Z}_{10}, +)$, $(\mathbb{Z}_{12}, +)$, $(\mathbb{Z}_{15}, +)$.

10. Ποιές είναι οι δυνατές τάξεις για τις υποομάδες των επόμενων κυκλικών ομάδων

$$(\mathbb{Z}, +), \quad (\mathbb{Z}_6, +), \quad (\mathbb{Z}_8, +), \quad (\mathbb{Z}_{12}, +), \quad (\mathbb{Z}_{60}, +), \quad (\mathbb{Z}_{17}, +)\ ;$$